Capitolul
2

INTRODUCERE IN GEOMETRIA DESCRIPTIVA

Geometria descriptiva, etapa geometrica a ştiinței grafice, constă în aplicarea *teoriei proiecțiilor* la soluționarea problemelor spațiale. Uneori însă, numai cu proiecții ortogonale, este imposibil să soluționezi anumite probleme cum ar fi, *adevărata mărime* a unor elemente geometrice situate în plane înclinate față de planele de proiecție. Adevărata marime a segmentelor, unghiurilor, sau figurilor plane, se poate determina prin metode proprii geometriei descriptive.

Puncte, linii, plane şi suprafețe spațiale se combină pentru a forma structuri de bază, *obiecte fizice*. Aceste elemente geometrice se pot afla în diferite relații reciproce, ca paralelismul, perpendicularitatea, înclinarea, intersecția.

Geometria descriptiva este folosită ca o unealtă de lucru, ca o sursă de soluții în multe ramuri inginereşti, cum sunt: mecanica, construcțiile şi arhitectura. Multe dintre metodele ei de lucru, sunt mai simple şi mai directe decât metodele matematicii pure. Se poate spune că uneori, pe baza cunoştințelor şi metodelor grafice, soluțiile în matematică se pot simplifica prin înțelegerea corectă a problemelor spațiale, prin analiza grafică a relațiilor spațiale dintre elementele geometrice componente.

Geometria descriptiva este esențiala în cercetare şi proiectare. Proiectarea începe întotdeauna cu o etapă grafică, urmată apoi de corelarea activităților inginereşti şi matematice, ducând la *caracterul ştiințific* al proiectării.

Geometria descriptivă este folosita în rezolvarea problemelor spațiale, oferind soluția pentru stabilirea *corespondenței biunivoce* dintre elementele spațiului şi ale planului (suportul reprezentărilor grafice). Metoda de lucru este *proiecția ortogonală*, iar asigurarea corespondenței biunivoce, obligă la folosirea *dublei sau triplei proiecții ortogonale*.

z

Aceasta se face utilizând două (fig. 2.1) sau trei (fig.2.2) plane de proiecție perpendiculare între ele, al căror nume este dat de poziția lor în spațiu: *planul orizontal* notat **[H] -** din

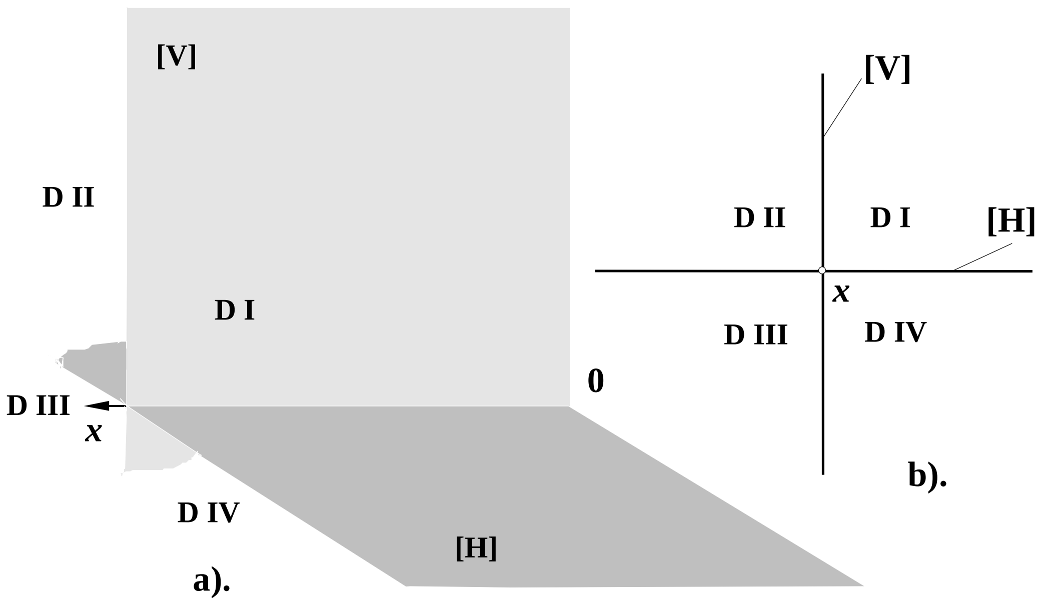

Fig. 2.1

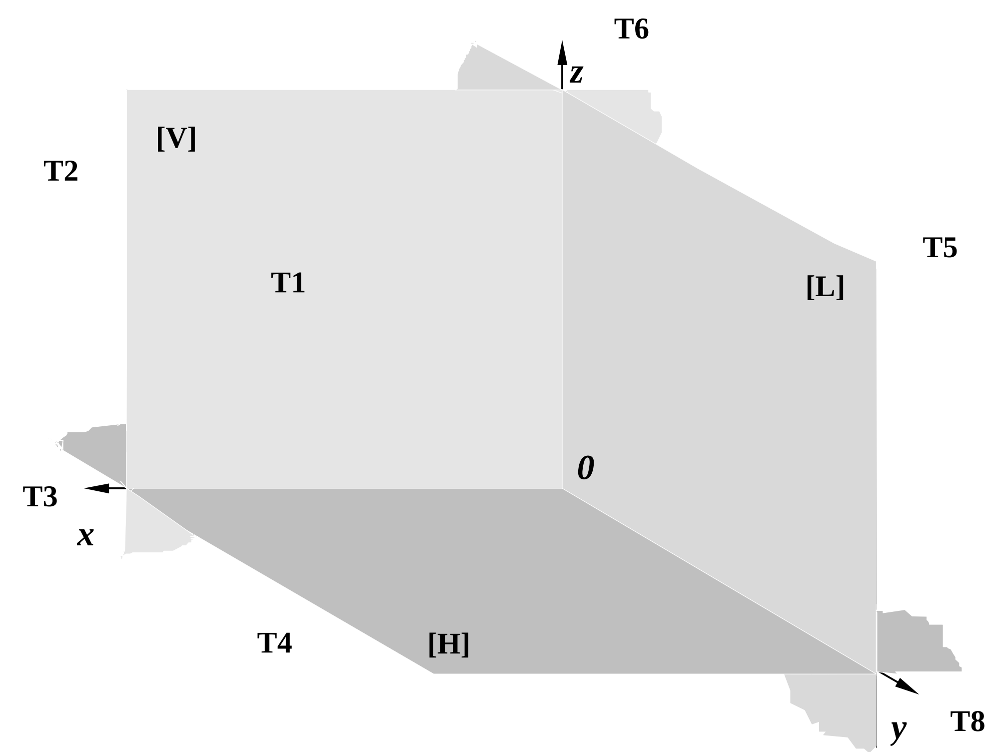

Fig. 2.2

franceză, în memoria părintelui geometriei descriptive, Gaspard Monge, *planul vertical* - **[V]** şi, în cazul triplei proiecţii ortogonale, *planul lateral* - **[L].** Două câte două, aceste plane se intersectează dupa drepte-axe de coordonate, concurente într-un punct numit origine $\boldsymbol{0}$:

$$[H] \cap [V] = \overline{\boldsymbol{0x}} \text{ - axa absciselor (linie de pământ);}$$
$$[H] \cap [L] = \overline{\boldsymbol{0y}} \text{ - axa depărtărilor;} \qquad (2.1)$$
$$[V] \cap [L] = \overline{\boldsymbol{0z}} \text{ - axa cotelor;}$$
$$\overline{\boldsymbol{0x}} \cap \overline{\boldsymbol{0y}} \cap \overline{\boldsymbol{0z}} = \boldsymbol{0} \text{ - origine .}$$

Se observă că cele trei plane de proiecţie împart spaţiul în patru unghiuri diedre numerotate în sens trigonometric (fig. 2.1-a şi b), respectiv în opt unghiuri triedre (fig. 2.2), fiecărui "diedru" corespunzându-i două "triedre", prin introducerea planului lateral de proiecţie.

O altă împărţire a spaţiului se poate face cu ajutorul planelor bisectoare, care trecând prin axa $\overline{\boldsymbol{0x}}$, împart unghiurile diedre în câte doi octanţi (fig. 2.3).

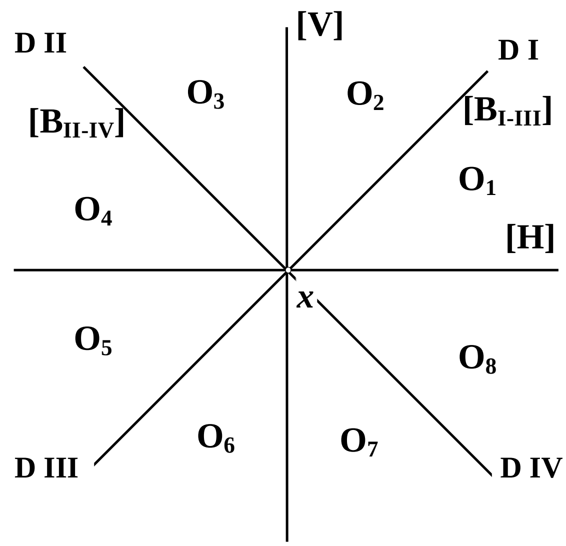

Fig. 2.3

Cu ajutorul în special şi convenţional, al primului diedru - fig. 2.1, sau triedru - fig. 2.2, se pot studia modul de reprezentare, proprietăţile, poziţiile reciproce, poziţiile particulare şi problemele ce se pot pune în legătură cu elementele geometrice clasice: punctul, dreapta, planul şi corpurile geometrice din categoria poliedrelor, cilindro-conicelor şi sfera, care sunt elementele de bază ale pieselor reale din domeniul tehnic-mecanic.

2.1 PUNCTUL IN GEOMETRIA DESCRIPTIVĂ

Proiecţia unui punct pe un plan de proiecţie nu conduce la o corespondenţă biunivocă între punctul din spaţiu şi imaginea sa, deoarece toate punctele situate pe aceeaşi perpendiculară faţă de planul de proiecţie vor avea aceeaşi imagine. O singură proiecţie deci, nu poate defini punctul într-un mod unic, clar determinat. Folosirea sistemului de două plane de proiecţie (fig. 2.1), este soluţia de lucru care răspunde acestui deziderat major. Pentru o imagine mai accesibilă, mai uşor de perceput, se recomandă utilizarea sistemului de trei plane de proiecţie, ca în fig. 2.2.

Proiecţiile ortogonale ale unui punct **A** din spaţiu, pe cele trei plane de proiecţie definite anterior, sunt picioarele perpendicularelor din **A** pe **[H], [V] şi** respectiv **[L]**, notate ***a*** - *proiecţie orizontală*, ***a'*** - *proiecţie verticală* şi ***a"***- *proiecţie laterală* (fig. 2.4).

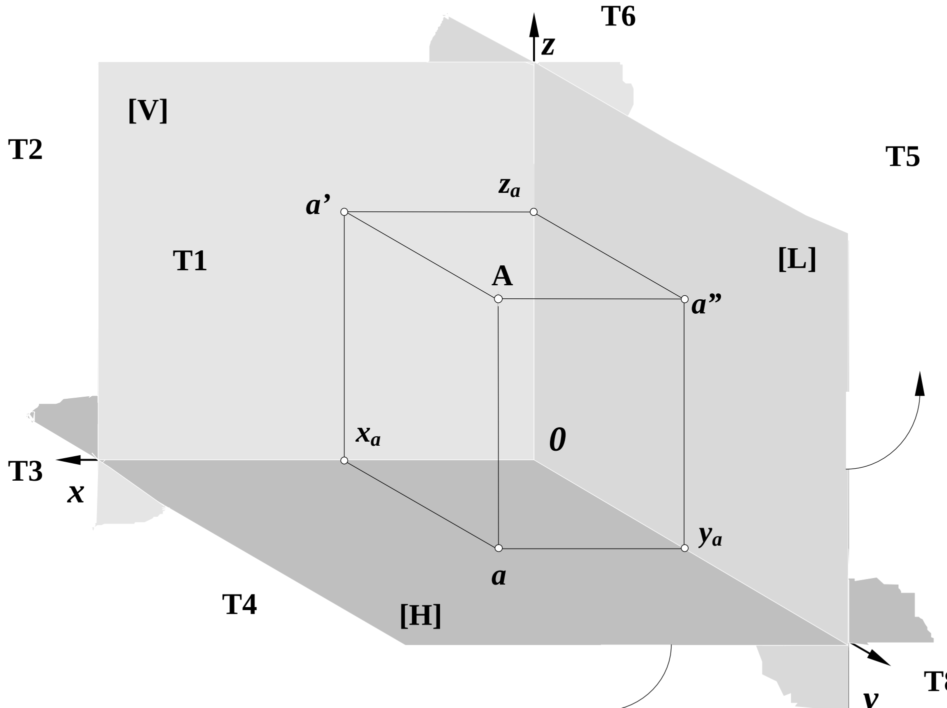

Fig. 2.4

Se numesc *coordonate descriptive* ale punctului **A**, distanţele de la punct la fiecare plan de proiecţie şi anume:

$$\Rightarrow \overline{Aa} = \overline{z_a 0} = z \qquad \textbf{cotă}$$
$$\Rightarrow \overline{Aa'} = \overline{y_a 0} = y \qquad \textbf{depărtare}$$
$$\Rightarrow \overline{Aa''} = \overline{x_a 0} = x \qquad \textbf{abscisă}$$

Imaginea spațială din fig. 2.4 este sugestivă, dar nu este utilă din punct de vedere al adevăratelor mărimi ale coordonatelor descriptive. Pentru a rezolva acest neajuns, vom roti planul orizontal şi pe cel lateral în jurul axelor $\overline{0x}$, respectiv $\overline{0z}$, până se suprapun pe planul vertical.

In urma acestei manevre se obține ceea ce se numeşte **EPURA Monge** a punctului **A** (fig. 2.5).

Se remarcă faptul că axa $\overline{0y}$ = **[H]∩[L],** aparține ambelor plane şi deci, pleacă o dată cu planul orizontal, sub numele $\overline{0y}$ şi o dată cu planul lateral, sub numele $\overline{0y_1}$, trecerea de la una la cealaltă făcându-se printr-o rotație de 90^o, în sens trigonometric. Depărtarea ***y***, trebuie marcată în ambele plane de proiecție. Proiecțiile ***a, a'*** şi ***a"***, se găsesc într-o corespondență dublă, care este impusă de definiția fiecăreia dintre ele, prin intermediul cordonatelor:

a - este definită de perechea de coordonate (***x,y***);
a' - este definită de perechea de coordonate (***x,z***);
a" - este definită de perechea de coordonate (y_1,***z***);

Grafic, această corespondență este marcată cu ajutorul *liniilor de ordine*, perpendiculare pe axe, care leagă două-câte-două, cele trei proiecții.

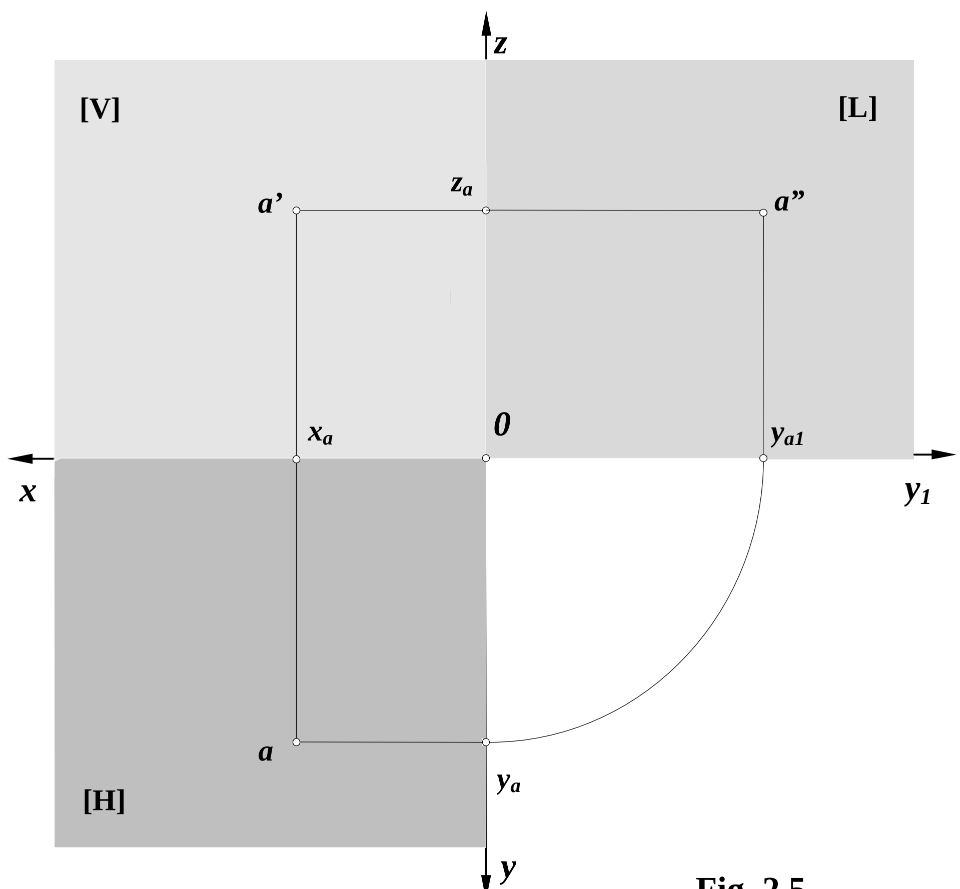

Fig. 2.5

Coordonatele descriptive ale punctelor variază atât ca valoare cât şi ca semn, funcție de poziția în spațiu (în raport de sistemul triortogonal de proiecție), a fiecărui punct. Cele trei plane de proiecție împart spațiul în opt zone (fig. 2.2), care de la numele unghiului a trei plane (în cazul acesta perpendiculare între ele), se numesc *triedre* (**T1, T2,…,T8**). Ținând cont de sensurile celor trei axe $\overline{0x}$, $\overline{0y}$, $\overline{0z}$, semnele coordonatelor descriptive ale unor puncte situate în cele opt triedre, vor fi conform tab. 2.1:

Tabelul 2.1

	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**T5**	**T6**	**T7**	**T8**
x	+	+	+	+	-	-	-	-
y	+	-	-	+	+	-	-	+
z	+	+	-	-	+	+	-	-

Punctul **A** reprezentat în fig. 2.4 şi 2.5, se găseşte în triedrul **T1**, deci are toate coordonatele pozitive.

2.1.1 Poziții particulare ale punctului.

Funcție de poziția față de planele de proiecție şi deci de valoarea coordonatelor descriptive, punctele pot ocupa următoarele poziții particulare (fig. 2.6):

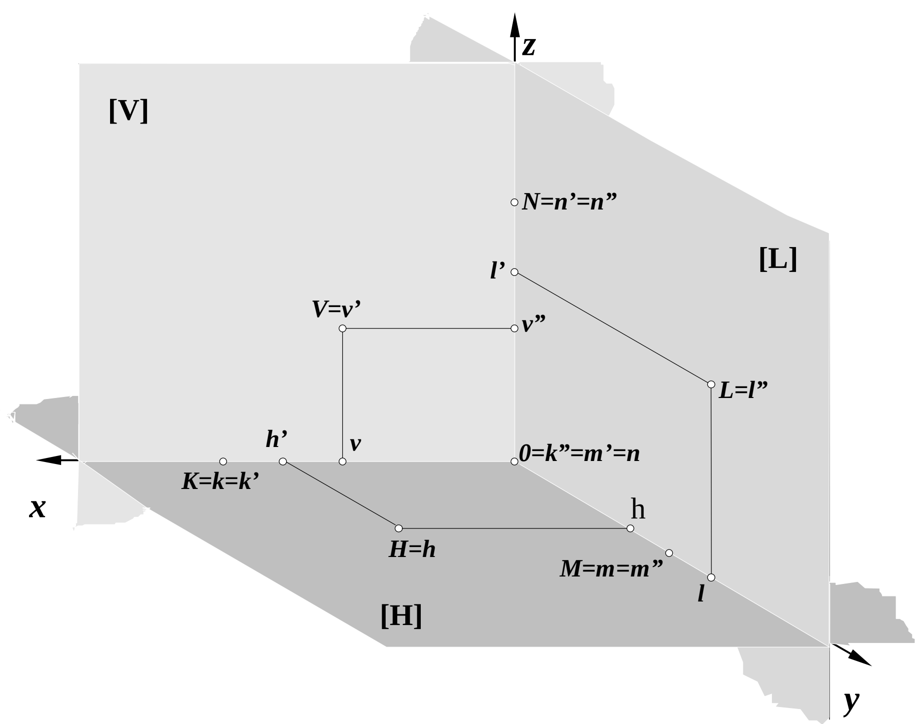

Fig. 2.5

- punct aparținând planului orizontal de proiecție:
  $H \in [H] \Leftrightarrow z = 0\,;$ (2.2)
- punct aparținând planului vertical de proiecție:
  $V \in [V] \Leftrightarrow y = 0\,;$ (2.3)
- punct aparținând planului lateral de proiecție:
  $L \in [L] \Leftrightarrow x = 0\,;$ (2.4)
- punct aparținând axei $\overline{0x}$:

$$K \in \overline{0x} \Leftrightarrow K \in [H] \cap [V] \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad (2.5)$$

- punct aparținând axei $\overline{0y}$:

$$M \in \overline{0y} \Leftrightarrow M \in [H] \cap [L] \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad (2.6)$$

- punct aparținând axei $\overline{0z}$:

$$N \in \overline{0z} \Leftrightarrow N \in [V] \cap [L] \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad (2.7)$$

- punct aparținând originii **:**

$$0 = [H] \cap [V] \cap [L] \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad (2.8)$$

Tot din categoria punctelor în poziții particulare fac parte punctele aparținând planelor bisectoare **[B_{I-III}]** şi **[B_{II-IV}](**fig.2.7**)**:

- punct aparținând planului bisector **[B_{I-III}]:**

  $I_i \in [B_{I-III}]$ $\Leftrightarrow$
  $y_i = z_i$ (2.9)

- punct aparținând planului bisector **[B_{II-IV}]:**

  $J_i \in [B_{I-III}]$ $\Leftrightarrow$
  $y_i = -z_i$ (2.10)

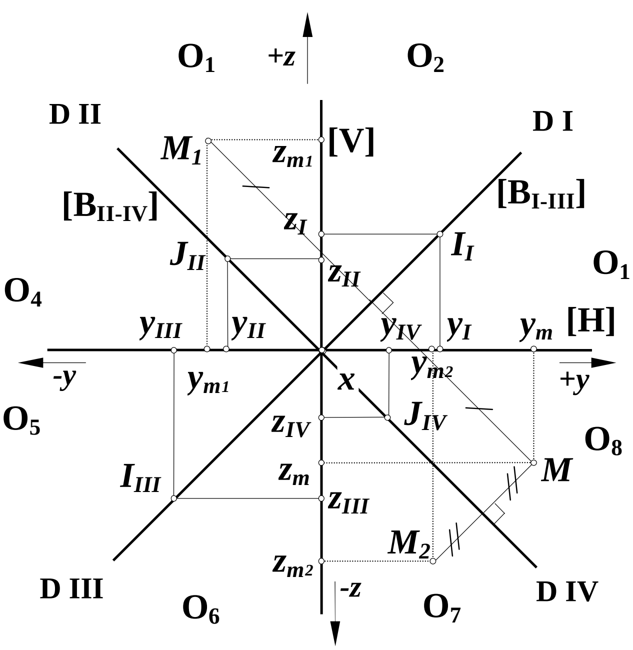

Fig. 2.7

Altfel spus, punctul care aparține planului bisector [**B$_{I-III}$**], are proiecția orizontală şi cea verticală, simetrice față de axa $\overline{0x}$, iar punctul care aparține planului bisector [**B$_{II-IV}$**], are proiecția orizontală şi cea verticală, confundate. Ținând cont de aceste proprietăți, un astfel de punct se poate recunoaşte foarte uşor în epură.

2.1.2 Simetrii. Se pot definii simetrii față de planele de proiecție, față de axele de coordonate, sau față de origine. De fiecare dată se va schimba semnul coordonatei (respectiv coordonatelor) care măsoară distanța de la punctul inițial la planul de proiecție (respectiv planele de proiecție) față de care se defineşte simetria:

- ***A₁*** simetricul lui ***A*** față de **[H]:** $\Rightarrow z_{a_1} = -z_a;$ (2.11)
- ***B₁*** simetricul lui ***B*** față de **[V]:** $\Rightarrow y_{b_1} = -y_b;$ (2.12)
- ***C₁*** simetricul lui ***C*** față de **[L]:** $\Rightarrow x_{c_1} = -x_c;$ (2.13)
- ***D₁*** simetricul lui ***D*** față de $\overline{0x}$: $\Rightarrow \begin{cases} z_{d_1} = -z_d \\ y_{d_1} = -y_d \end{cases};$ (2.14)
- ***E₁*** simetricul lui ***E*** față de $\overline{0y}$: $\Rightarrow \begin{cases} z_{e_1} = -z_e \\ x_{e_1} = -x_e \end{cases};$ (2.15)
- ***F₁*** simetricul lui ***F*** față de $\overline{0z}$: $\Rightarrow \begin{cases} y_{f_1} = -y_f \\ x_{f_1} = -x_f \end{cases};$ (2.16)
- ***G₁*** simetricul lui ***G*** față de 0: $\Rightarrow \begin{cases} z_{g_1} = -z_g \\ y_{g_1} = -y_g \\ x_{g_1} = -x_g \end{cases};$ (2.17)

Adeseori se face referire la simetria față de planele bisectoare. Un punct ***M***, are un simetric ***M₁*** față de **[B$_{I-III}$]** şi un simetric ***M₂*** față de **[B$_{II-IV}$]**, conform fig. 2.7. Se constată că:

- ***M₁*** simetricul lui ***M*** față de **[B$_{I-III}$]:** $\Rightarrow \begin{cases} y_{m_1} = z_m \\ z_{m_1} = y_m \end{cases}$ (2.18)
- ***M₂*** simetricul lui ***M*** față de **[B$_{II-IV}$]:** $\Rightarrow \begin{cases} y_{m_2} = (-)z_m \\ z_{m_2} = (-)y_m \end{cases}$ (2.19)

2.2 APLICAȚII

Exemplu rezolvat:

Fie punctul **A₁**(20; -40; 30). Să se reprezinte epura punctului **A₁** împreună cu **A₂**, simetricul său față de origine şi să se specifice triedrele cărora le aparțin.

Soluție: coordonatele punctului **A₂** se obțin prin schimbarea semnului tuturor coordonatelor punctului **A₁** ⇒ **A₂**(-20; 40; -30). **A₁**∈ **T2,** iar **A₂**∈ **T8.**

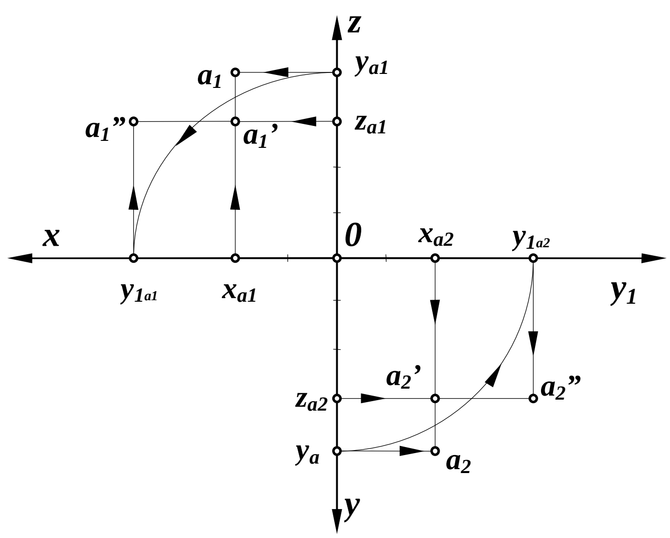

Fig. 2.8

1. Se dă punctul **A**(40; 30; 50). Să se modifice abscisa, depărtarea şi cota punctului **A**, astfel încât, el să aparțină pe rând celor opt triedre. Să se reprezinte punctele obținute în aceeaşi epură.

2. Să se reprezinte în epură punctele: **A**(10; 50; 30), **B**(30; 40; -15), **C**(20; -30; -20), **D**(40; -20; 20), **E**(-30; 10; 40), **F**(-20; 30; -50), **G**(-40; -20; -40), **J**(-50; -40; 40). Să se specifice cărui triedru aparține fiecare punct.

3. Să se reprezinte în epură punctele: **H**(40; 20; 0), **V**(20; 0; -30), **L**(0; 15; 20), **K**(20; 0; 0), **M**(0; 40; 0), **N**(0; 0; 30), **T**(0; 0; 0). Să se specifice cui aparține fiecare punct (plan, axă, origine).

4. Fie punctul **A**(50; 20; -30). Să se reprezinte în epură punctul **A** împreună cu punctele:

- **B -** simetricul lui **A** față de planul orizontal **[H];**
- **C -** simetricul lui **A** față de planul vertical **[V];**
- **D -** simetricul lui **A** față de planul lateral **[L];**
- **E -** simetricul lui **A** față de axa $\overline{0x}$**;**
- **F -** simetricul lui **A** față de axa $\overline{0y}$**;**
- **G -** simetricul lui **A** față de axa $\overline{0z}$**.**

5. Se dă punctul **M**(50; 35; 40). Se cer proiecțiile lui **M**, împreună cu proiecțiile punctelor:

- $\mathbf{M_1}$ - simetricul lui **M** față de axa $\overline{0x}$;
- $\mathbf{M_2}$ - simetricul lui $\mathbf{M_1}$ față de planul **[L];**
- $\mathbf{M_3}$ - simetricul lui $\mathbf{M_2}$ față de planul **[H];**
- $\mathbf{M_4}$ - simetricul lui $\mathbf{M_3}$ față de axa $\overline{0y}$**;**
- $\mathbf{M_5}$ - simetricul lui $\mathbf{M_4}$ față de planul **[V];**
- $\mathbf{M_6}$ - simetricul lui $\mathbf{M_5}$ față de axa $\overline{0z}$**.**

6. Se dă cubul $\{VALNKHMO\}$, având latura de 40mm, cu trei fețe în planele de proiecție şi un vârf în origine. Să se reprezinte în epură proiecțiile vârfurilor cubului.

7. Se dă punctul **M**(40, 30, -50). Să se reprezinte în epură puntul **M** împreună cu simetricele sale $\mathbf{M_1}$ şi $\mathbf{M_2}$ față de planele bisectoare.

8. Se dă punctul **A**(50, -30, 20). Să se reprezinte în epură punctul **A** împreună cu punctele:

- **B -** simetricul lui **A** față de planul bisector $[\mathbf{B_{I\text{-}III}}]$**;**
- **C -** simetricul lui **A** față de planul bisector $[\mathbf{B_{II\text{-}IV}}]$**;**
- **D -** simetricul lui **A** față de planul orizontal **[H];**
- **E -** simetricul lui **A** față de planul vertical **[V];**
- **F** - simetricul lui **A** față de planul lateral **[L];**
- **G** - simetricul lui **A** față de origine.

9. Se dau punctele **I**(50, 35, z) şi **J**(40, y, 15). Să se determine coordonatele care lipsesc şi să se reprezinte proiecțiile acestor puncte, dacă ele aparțin planelor bisectoare **[B_{I-III}]**, respectiv **[B_{II-IV}]**. Să se precizeze diedrele şi octanții din care aceste puncte fac parte.